1.8.5 Archimédův zákon I

Předpoklady: 1803

Pedagogická poznámka: Archimédův zákon je jedním z nejlepších lakmusových papírků výuky fyziky. Z mně nejasných důvodů zná jeho znění téměř každý, ale jen zlomek studentů ví, co doopravdy znamená a je schopen z něj vyvozovat nějaké závěry. Pokud se studenti tváří, že Archimédův zákon umí a je tedy zbytečné s ním mařit čas, ukáži studentům první tři příklady, jinak časem neplýtváme a vrátíme se k nim na různých místech této a následujících dvou hodin.

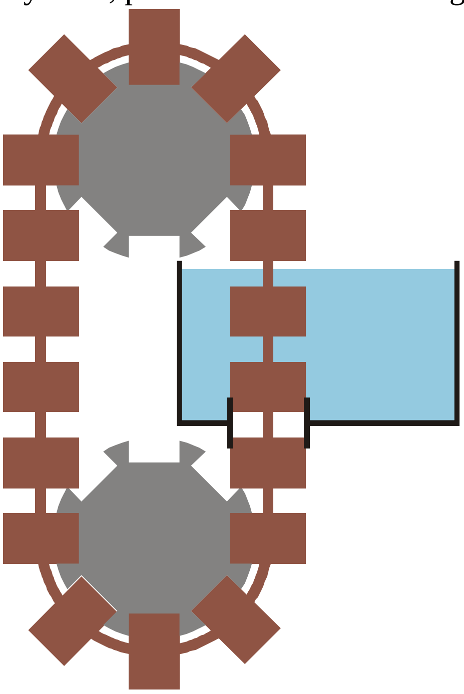
Archimédův zákon: Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno vztlakovou silou, která se rovná tíze kapaliny tělesem vytlačené.

Předchozí věta je krásná, ale nemůžeme tvrdit, že umíme Archimédův zákon, dokud nedokážeme vyřešit následující příklady.

Př. 1: Plavec se začíná topit. Použij Archimédův zákon a navrhni, co má dělat, aby se neutopil, než k němu dorazí pomoc.

Př. 2: V nádobě je nalita voda, na hladině pluje kus ledu. Jak se změní výška hladiny, když led roztaje?

Př. 3: Na obrázku je náčrtek jednoho z pokusů o konstrukci perpetua mobile. Voda v nádrži nadlehčuje kusy korku, které neustále stoupají k hladině a tak roztáčejí kola. Vysvětli, proč zařízení nemůže fungovat naznačeným způsobem.



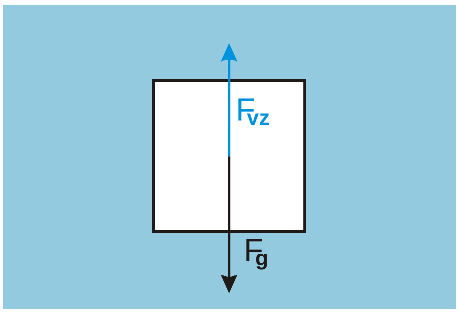
Předměty ponořené do vody nadlehčuje vztlaková síla (i ty které neplavou, kameny ve vodě jsou podstatně „lehčí“ než na vzduchu). Na čem tato síla závisí?

Snažíme se potopit do vody nafukovací míč. Čím větší část míče je pod hladinou, tím těžší je míč udržet pod vodou. Od okamžiku, kdy je míč zcela ponořený, se síla nezvětšuje. $\Rightarrow$

- **Vztlaková síla roste s velikostí ponořeného objemu tělesa.**

Mořská voda (voda s větší hustotou) nás nadlehčuje více než voda sladká. $\Rightarrow$

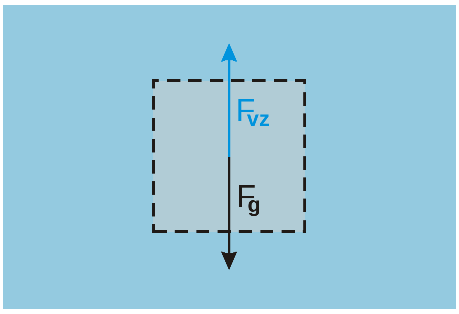
- **Vztlaková síla roste s hustotou kapaliny.**



Na těleso ponořené do kapaliny působí dvě síly:

- gravitační síla kolmo dolů,
- vztlaková síla kapaliny kolmo vzhůru.

Kapalina působí na ponořené těleso stejně, jako by působila na těleso z kapaliny stejného tvaru (takovému myšlenému kapalinovému tělesu říkáme Archimédovo těleso).



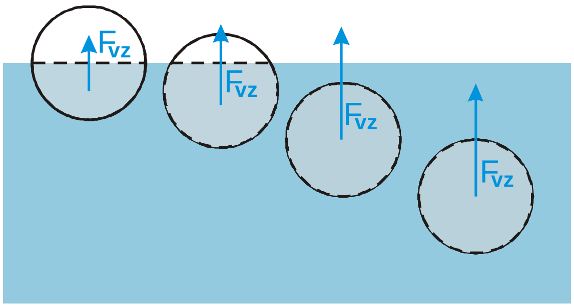
Na Archimédovo těleso působí dvě síly:

- gravitační síla kolmo dolů,
- vztlaková síla kapaliny kolmo vzhůru.

Obě síly musí být stejně velké (Archimédovo těleso je také z kapaliny a musí tedy zůstat v klidu) $\Rightarrow$ velikost vztlakové síly je stejná jako velikost tíhy Archimédova tělesa.

Gravitační síla na Archimédovo těleso: $F_g = mg = V\rho g = F_{vz}$.

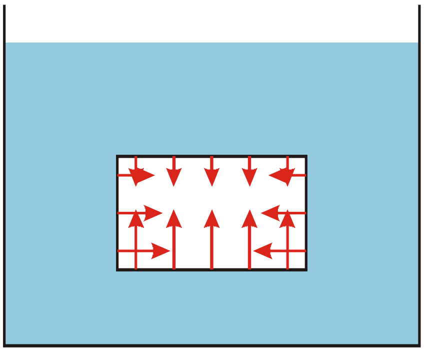
Př. 4: Vysvětli na základě předchozí úvahy, proč při ponořování míče do vody roste vztlaková síla, pouze dokud míč není zcela ponořený.



Během ponořování roste ponořený objem (objem Archimédova tělesa) a tedy i vztlaková síla. Jakmile je míč celý pod hladinou, ponořený objem dál neroste a neroste tedy ani vztlaková síla.

Jak souvisí vztlaková síla s hydrostatickým tlakem?

Př. 5: Ve vodě je zcela ponořen kvádr o ploše podstavy S a výšce v tak, že obě jeho podstavy jsou rovnoběžné s hladinou. Nakresli obrázek situace a nakresli do obrázku hydrostatický tlak, kterým voda na kvádr působí.



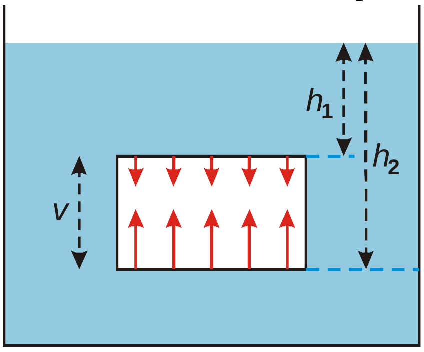
Z obrázku je zřejmé, že hydrostatický tlak má nenulovou výslednici:

- výsledná síla působící na levou stěnu se vyruší s výslednou silou působící na pravou stěnu,
- výsledná síla působí na přední stěnu se vyruší s výslednou silou působící na zadní stěnu,
- výsledná síla působí na dolní podstavu je větší než výsledná síla působící na horní podstavu (spodní podstava je ve větší hloubce, kde je větší tlak),

$\Rightarrow$ na kvádr působí výsledná síla směrem kolmo vzhůru – **vztlaková síla kapaliny**.

Pedagogická poznámka: Následující výpočet provádím na tabuli pouze jako potvrzení úvahy o Archimédově tělese. Žákům nedoporučuji, aby si ho opisovali do sešitů. Slabší žáci, kteří se rádi drží konkrétních výpočtů, mají tendenci opouštět představu Archimédova tělesa a snažit se počítat vztlakovou sílu z hydrostatického tlaku (což v naprosté většině případů nejde).

U kvádru můžeme snadno spočítat i velikost této síly.



- Síla na horní podstavu: $F_1 = p_1 S = h_1 \rho g S$.
- Síla na dolní podstavu: $F_2 = p_2 S = h_2 \rho g S$.
- Výsledná síla (kolmo vzhůru):
- $F = F_2 - F_1 = h_2 \rho g S - h_1 \rho g S = (h_2 - h_1) S \rho g = v S \rho g = V \rho g$

$\Rightarrow$ Vztlaková síla působící na ponořené předměty je výslednicí hydrostatického tlaku.

Výslednicí hydrostatického tlaku působícího na těleso je vztlaková síla, jejíž velikost je určena vztahem $F_{vz} = V \rho g$, kde V je objem ponořené části tělesa.

Př. 6: Plavec se začíná topit. Použij Archimédův zákon a navrhni, co má dělat, aby se neutopil, než k němu dorazí pomoc.

Topící se musí snažit, aby měl co největší ponořený objem a voda ho tak co nejvíce nadlehčovala. Radí se to snadno, ale hůře se to realizuje, protože topící se podvědomě snaží

dostat hlavu ven z vody $\Rightarrow$ zmenšuje svůj ponořený objem $\Rightarrow$ voda ho méně nadlehčuje $\Rightarrow$ více si musí pomáhat rukama $\Rightarrow$ dříve se unaví a utopí.
Z hlediska plavání je dýchací otvor (nos) umístěn na lidském těle dost nevýhodně, člověk daleko hůře než například pes dosáhne toho, aby měl celé tělo ponořené a nad hladinu vyčníval pouze nos.

Př. 7: Urči vztlakovou sílu, kterou působí líh na lžičku o objemu $35\,\text{cm}^3$. Hustota lihu $\rho = 790\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

$V = 35\,\text{cm}^3 = 0{,}000035\,\text{m}^3 = 3{,}5\cdot10^{-5}\,\text{m}^3$, $\rho = 790\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $F_{vz} = ?$

$F_{vz} = V\rho g = 3{,}5\cdot10^{-5}\cdot790\cdot10 = 0{,}28\,\text{N}$

Voda nadlehčuje lžičku silou 0,28 N

Pedagogická poznámka: Vzácné nejsou výsledky 280 N, které by žáci ihned měli odhalit jako nesmyslné, vyplývající ze špatných převodů.

Př. 8: V hloubce 2 m pod hladinou leží kámen o hmotnosti 9 kg a objemu 2 litry. Jakou silou ho nadlehčuje voda? Jakou silou ho musíme zvedat? Jakou silou ho bude voda nadlehčovat v hloubce 1 m pod hladinou?

$m = 9\,\text{kg}$, $V = 2\,\text{l} = 2\cdot10^{-3}\text{m}^3$, $\rho = 1000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $F_{vz} = ?$, $F = ?$

$F_{vz} = V\rho g = 2\cdot10^{-3}\cdot1000\cdot10 = 20\,\text{N}$

Na kámen působí kromě vztlakové síly také gravitační síla $F_g = mg = 9\cdot10\,\text{N} = 90\,\text{N}$.

Výsledná síla působící na kámen $90-20\,\text{N} = 70\,\text{N}$ $\Rightarrow$ kámen musíme zvedat silou 70 N.

Vztlaková síla se s hloubkou nemění $\Rightarrow$ bude stejná i v hloubce 1m.

Pedagogická poznámka: Někteří žáci se samozřejmě snaží upotřebit i údaj o hloubce.

Př. 9: Urči jakou vztlakovou silou působí voda na cihlu o hmotnosti 5 kg a hustotě $\rho = 1900\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

$m = 5\,\text{kg}$, $\rho_v = 1000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\rho_c = 1900\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $F_{vz} = ?$

$F_{vz} = V\rho_v g$ $\Rightarrow$ musíme zjistit objem cihly (je zcela ponořená) $m = V\rho \Rightarrow V = \dfrac{m}{\rho_c}$.

$$F_{vz} = V\rho_v g = \frac{m}{\rho_c}\rho_v g = \frac{5}{1900}1000\cdot10\,\text{N} = 26\,\text{N}$$

Př. 10: Ve vodě plave smrkové poleno o hmotnosti 3 kg a hustotě $\rho = 600\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Jakou vztlakovou silou na něj působí voda?

$m = 3\,\text{kg}$, $\rho_v = 1000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\rho_d = 600\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $F_{vz} = ?$

$F_{vz} = V\rho_v g$ $\Rightarrow$ nemůžeme spočítat, neznáme objem ponořené části polena (určitě není ponořené celé jako cihla v předchozím příkladě).

Poleno plave $\Rightarrow$ výsledná síla na poleno je nulová $\Rightarrow$ $F_{vz} = F_g = mg = 3\cdot10\,\text{N} = 30\,\text{N}$.

Na plavoucí poleno působí vztlaková síla 30 N.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je dobrou pastí na ty, kteří nepřemýšlejí a počítají zcela automaticky.
Dva následující příklady stíhá pouze část třídy.

Př. 11: Urči přibližně maximální hmotnost nákladu, který je možné naložit do laminátové pramice o hmotnosti 65 kg. Předpokládej, že pramice má přibližně rozměry kvádru o délce 3600 mm, šířce 1000 mm a výšce 400 mm. Aby se pramice během plavby nepotopila, musí se horní hranice nacházet minimálně 10 cm nad hladinou vody.

$m = 65\,\mathrm{kg}$, $\rho_v = 1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $a = 3600\,\mathrm{mm} = 3{,}6\,\mathrm{m}$, $b = 1000\,\mathrm{mm} = 1\,\mathrm{m}$, $c = 400\,\mathrm{mm} = 0{,}4\,\mathrm{m}$,
$h = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $m_n = ?$
Z rozměrů pramice určíme ponořený objem, z něj vztlakovou sílu a z ní nosnost lodě.
$V = abc = 3{,}6\cdot 1\cdot 0{,}3\,\mathrm{m^3} = 1{,}1\,\mathrm{m^3}$ (ponořená výška může být pouze $0{,}4-0{,}1\,\mathrm{m} = 0{,}3\,\mathrm{m}$)
$F_{vz} = V\rho g = 1{,}1\cdot 1000\cdot 10\,\mathrm{N} = 11000\,\mathrm{N}$ $\Rightarrow$ možná hmotnost pramice a nákladu 1100 kg $\Rightarrow$
hmotnost nákladu $1100 - 65\,\mathrm{kg} = 1035\,\mathrm{kg}$.
Na pramici můžeme maximálně naložit 1035 kg.

Dodatek: Výrobce uvádí na adrese http://www.pramice.com/o-nas/pramice maximální zatížení 336 kg, což je způsobeno jednak tvarem pramice (zužuje se ke špičce) a pak menším maximálním ponorem (190 mm místo námi použitých 300 mm).

Pedagogická poznámka: Poslední příklad slouží pouze k zabavení těch nejrychlejší jedinců. Příklad na podobném principu se řeší ještě v hodině 010807, kde se předpokládá řešení celou třídou.

Př. 12: Na vodě plave dřevěný hranol o průřezu 10 cm x 10 cm. Urči, jakou musím mít minimální délku, aby unesl hocha o hmotnosti 50 kg. Hustota smrkového dřeva je v tabulkách udávána v rozmezí $\rho_d = 400 - 600\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

$m = 50\,\mathrm{kg}$, $\rho_v = 1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\rho_d = 600\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ (počítáme s nejhorší možností),
$a = b = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $c = ?$
Problém: Čím větší je délka hranolu, tím větší je jeho hmotnost $\Rightarrow$ nemůžeme počítat přímo tím, že určíme potřebnou velikost vztlakové síly vody (bude tím větší čím delší hranol budeme potřebovat).
Sledujem síly působící na hranol:

- směrem dolů gravitační síla na hranol F_{gd} a hocha F_g,
- směrem nahoru vztlaková síla vody F_{vz}.

$F_g + F_{gd} = F_{vz}$
$mg + V_d\rho_d g = V_d\rho_v g$
$m + V_d\rho_d = V_d\rho_v$
$m = V_d\rho_v - V_d\rho_d = V_d(\rho_v - \rho_d)$
$$\frac{m}{\rho_v - \rho_d} = V_d = a^2 c \Rightarrow c = \frac{m}{a^2(\rho_v - \rho_d)} = \frac{50}{0{,}1^2(1000-600)}\,\mathrm{m} = 12{,}5\,\mathrm{m}$$

Hranol musím mít délku minimálně 12,5 m.

Shrnutí: Výslednicí hydrostatického tlaku působícího na těleso je vztlaková síla, jejíž velikost je určena vztahem $F_{vz} = V \rho g$, kde V je objem ponořené části tělesa.